La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée [1]

D'Amore B. (2003). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

Bruno D'Amore[2]

N.R.D.
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Italia

Resumé. Ce travail s'inspire aux études dont Raymond Duval (1988a,b,c, 1993) a été indiscutablement le pionnier, et il se situe dans le filon des recherches du NRD de Bologne, ces dernières visant à retracer et à mettre en évidence les différentes hypothèses visant à expliquer la dévolution manquée (Perrin Glorian, 1994), et donc les processus en jeu dans la scolarisation du savoir mathématique (D'Amore, 1999a). Ce travail s'inscrit dans la ligne des recherches sur les notions de "concept" et "d'objet" en mathématiques (D'Amore, 2001).

Summary. This study derives inspiration from the original discussions of Raymond Duval (1988a,b,c, 1993), and forms part of the research being done by the NRD of Bologna University. It attempts to draw out and to substantiate the diverse hypotheses that lie at the foundations of unsuccessful devolution (Perrin Glorian, 1994), and therefore also at the foundations of the schooling of mathematical awareness (D'Amore, 1999a), exploting topics of research about "concepts" and "objects" in mathematics (D'Amore, 2001).

Sumario. Este trabajo se inspira en los estudios en los que ha sido pionero indiscutible Raymond Duval (1988a,b,c, 1993), y se sitúa en la línea de investigación del NRD de Bolonia, que busca localizar y evidenciar las diferentes hipótesis que se hallan en la base de la falta de devolución (Perrin Glorian, 1994), y por lo tanto en la base de la escolarización del saber matemático (D'Amore, 1999a), aprovechando de temas de investigación sobre "conceptos" y "objetos" en matemática (D'Amore, 2001).

1. Concepts et objet en mathématique

[1] Travail exécuté dans le cadre du Programme de recherche locale de l'Unité de Bologna (ex 40%) financié par l'Université de Bologna et par le Ministère de l'Université et de la recherche: *Recherches sur le fonctionnement du système élève-enseignant-savoir: motivations de la dévolution manquée*. Programme de recherche nationale: *Difficultés en mathématiques: instruments pour observer, interpréter, intervenir.*

[2] Adresse: damore@dm.unibo.it

Tout concept en mathématique:

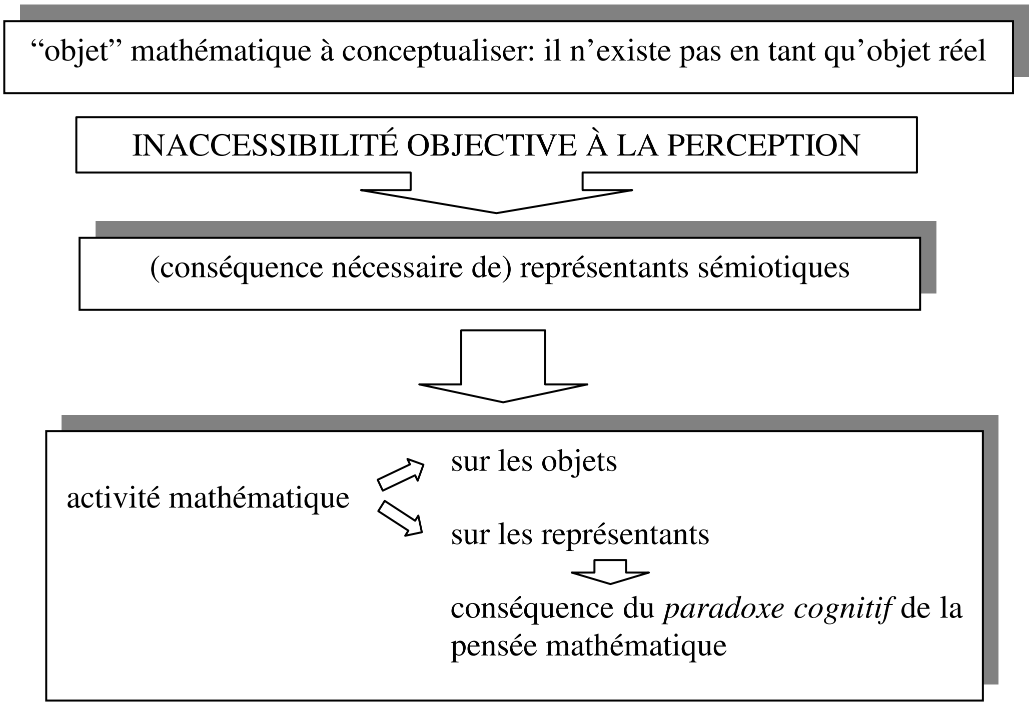
- se réfère à des “non-objets”; la conceptualisation n’est donc pas fondée sur des significations se référant directement aux réalités concrètes et ne peut pas l’être; en d’autres mots, les références ostensibles ne sont pas possibles dans les mathématiques
- doit être rendu accessible par représentations sémiotiques variées; vu l’absence d’ «objets réels» que l’on pourrait montrer, observer, manipuler ou évoquer, la conceptualisation doit donc nécessairement passer par la coordination de plusieurs registres de représentation qui, pour différentes raisons, ne peuvent pas être de même nature, par exemple seulement linguistiques, seulement visuel ou seulement formel[3]
- en mathématique on parle plus souvent d’ “objets mathématiques” que de concepts mathématiques, car la mathématique étudie de préférence des objets plutôt que des concepts (Duval, 1998).

En Duval la notion de concept, préliminaire, ou prioritaire chez la plupart des Auteurs, devient secondaire, tandis que ce qui acquiert un caractère prioritaire est le couple: *système de signe - objet*, comme je le mettrai en évidence dans le paragraphe prochaine à propos du *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui a été mis en évidence justement par Duval (1993, page 38).

Le schéma suivant me semble beaucoup plus efficace qu’un long discours:

[3] Ici on entend “objet réel” dans le sens intuitif de “chose”. Dans la *Métaphysique*, Aristote exprime bien ce que cela signifie quand il affirme que la “chose”, en tant que partie du réel, est ce qui présente les trois caractéristiques suivantes:

- tridimensionalité
- accessibilité sensorielle multiple (c’est à dire simultanément par plusieurs sens) indépendamment des représentations sémiotique
- possibilité de séparation matérielle des autres “choses”.



2. Le paradoxe cognitive de la pensée mathématique

Voici comment ce paradoxe est présenté (Duval, 1993, page 38):

> «(...) d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique, rend la confusion presque inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques, s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques».

Je vais expliciter les significations de ces termes qui n'ont pas toujours été utilisés dans le même sens. Je n'aurai là aucune prétention exhaustive:

sémiotique $=_{df}$ formation d'une représentation par association ou combinaison de signes
noétique $=_{df}$ appréhension conceptuelle d'un objet

J'entendrai, désormais:
$r^m =_{df}$ registre sémiotique (m = l, 2, 3, ...)
$R^m{}_i(A) =_{df}$ représentation sémiotique i-ème (i = 1, 2, 3, …) d'un concept A dans le registre sémiotique r^m
On peut remarquer que si le registre sémiotique change, la représentation sémiotique change nécessairement aussi, tandis que l'inverse n'est pas toujours vrai: la représentation sémiotique peut changer dans le maintien du même registre sémiotique.[4]

3. Exemple de représentations sémiotiques d'un concept C

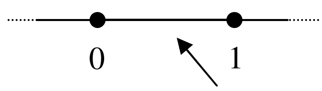
concept C

registre sémiotique r^1: *la langue commune*
représentation sémiotique $R^1{}_1$: le milieu
représentation sémiotique $R^1{}_2$: la moitié
etc.

registre sémiotique r^2: *l'arithmétique*
représentation sémiotique $R^2{}_1$: ½ (écriture fractionnaire)
représentation sémiotique $R^2{}_2$: 0.5 (écriture décimale)
représentation sémiotique $R^2{}_3$: $5 \cdot 10^{-1}$ (écriture exponentielle)
etc.

registre sémiotique r^3: *l'algèbre*
représentation sémiotique $R^3{}_1$: $\{x \in Q^+ / 2x-1=0\}$(écriture par ensembles)
représentation sémiotique $R^3{}_2$: $y= f(x): x \longrightarrow x/2$ (écriture fonctionnelle)
etc.

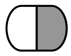
registre sémiotique r^4: *le langage figuratif*
représentation sémiotique $R^4{}_1$:
etc.



[4] C'est en cela que l'on distingue les traitements et les conversions.

registre sémiotique r^5: *schémas pictographiques*

représentation sémiotique $R^5{}_1$: 

représentation sémiotique $R^5{}_2$: 

représentation sémiotique $R^5{}_3$: 

etc.

etc.

D'autres exemples peuvent être tirés de la théorie des ensembles élémentaire ou naïve, dans laquelle 1e même ensemble peut être représenté dans des différents registres sémiotiques et, à l'intérieur de chacun de ces registres, en utilisant différentes représentations sémiotiques.

4. Le paradoxe de Duval et les causes de dévolution manquée

Dans ce paradoxe, que Raymond Duval met bien en évidence ici, peut-il y avoir une cause potentielle de dévolutions manquées?
Prenons l'exemple d'une activité proposée aux élèves et pour laquelle, tant du point de vue de l'enseignant, de celui de la noosphère et même celui des élèves, chacun dispose des connaissances requises pour effectuer l'activité. Mais de manière surprenante, il se trouve dans une situation de blocage pour mobiliser les connaissances dont il dispose, ou pour même se risquer à essayer quelque chose. Disposer d'une connaissance cela veut dire, d'un point de vue cognitif, avoir acquis le ou les concepts mathématiques, ou encore avoir l'accès aux objets mathématiques à utiliser dans le contexte de la tâche ou du problème. Comment expliquer alors un tel blocage? Le plus souvent la raison en est la réduction par l'étudiant de l'objet mathématique à l'une des représentations sémiotiques particulières, confusion normale pour l'élève, étant donné le caractère très particulier de l'accès aux objets mathématiques. Et cela se manifeste par l'impossibilité de convertir les données de la consigne ou d'un premier résultat obtenu en une autre représentation qui permet de voir et d'avancer. Mais cette confusion risque de s'institutionnaliser si l'enseignant ou l'organisation des programmes ignorent pourquoi la compréhension en mathématiques fonctionne de manière totalement différente de la compréhension dans les autres domaines de connaissance. La tendance serait plutôt de faire comme si l'acquisition des connaissances se faisait selon un modèle commun pour tous les types de connaissance. Devant ce constat de blocage de l'élève, l'enseignant et les représentants de la noosphère ne peuvent que porter ce jugement: il n'avait pas encore acquis ce qu'il devait avoir acquis et que l'on croyait donc qu'il avait acquis. Sans savoir comment d'ailleurs comment remédier réellement à la

situation. Et cette histoire se répète en boucle jusqu'à ce que les élèves soient enfin dans des filières où il n'y a plus de mathématiques.
En réalité, dans ce type de situation paradoxale, personne ne comprend plus ce qui est en train de se passer, dans la mesure où chacun des acteurs de cette aventure a une perception différente de ce que sont les objets ou le concepts mathématiques.

5. Sémiotique et noétique dans l'apprentissage des mathématiques

Dans le domaine mathématique, l'acquisition conceptuelle d'un objet passe nécessairement par l'acquisition d'une ou plusieurs représentations sémiotiques (Duval, 1988a, b, c, 1989, 1993; Chevallard, 1991; Godino, Batanero, 1994).
J'utiliserai encore une fois un schéma pour illustrer la question car il me semble plus incisif et efficace:

caractéristiques de la sémiotique	*représentation* *traitement* *conversion*	ces trois sont des activités cognitives différentes

objet A à représenter

choix des traits caractéristiques de A

REPRESENTATION $R^{m}_{i}(A)$ dans un registre sémiotique donné r^{m}

transformation de la représentation $\longrightarrow$ *TRAITEMENT*

nouvelle représentation $(i \neq j)$ $R^{m}_{j}(A)$ dans le *même* registre sémiotique r^{m}

changement de registre $\longrightarrow$ *CONVERSION*

nouvelle représentation $(h \neq i, h \neq j)$ $R^{n}_{h}(A)$ dans un *autre* registre sémiotique r^{n} $(n \neq m)$ $(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, \ldots)$.

Il faut remarquer les flèches qui, dans la première partie du schéma vont du bas en haut. Leur raison d'être est la suivante: les traits distinctifs de A (les propriétés de l'objet A) qui sont explicités ou présentés par la représentation dépendent des capacités sémiotiques du registre choisi. En choisissant un registre différent on rende accessible d'autres traits de A. Cela dépend du fait que deux représentations du même objet dans des registres différents ont des contenus conceptuels différents.

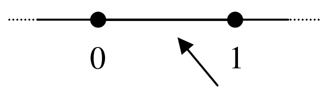
6. Exemples de traitement et conversion

½ $\boxed{\text{transformation de traitement en } r^2} \Rightarrow$ 0.5

0.5 $\boxed{\text{transformation de traitement en } r^2} \Rightarrow$ $5 \cdot 10^{-1}$

Elles rendent possible d'autres transformations de traitement.

½ $\Rightarrow \boxed{\text{transformation de conversion de } r^2 \text{ à } r^4} \Rightarrow$



Elles rendent possible d'autres transformations de conversion.

7. Caractéristiques de la noétique

L'acquisition conceptuelle d'un objet mathématique se fonde sur deux caractéristiques "fortes" de celui (Duval, 1993):

1. l'utilisation de plusieurs registres de représentation sémiotique est typique de la pensée humaine
2. la création et le développement de nouveaux systèmes sémiotiques[5] est le symbole (historique) du développement des connaissance mathématiques.

Ces considérations montrent l'étroite interdépendance entre noétique et sémiotique, dès qu'on passe de l'une à l'autre: non seulement donc *il n'y a pas de noétique sans sémiotique*, mais la sémiotique est assumée comme une caractéristique nécessaire à garantir le premier pas vers la noétique.
À ce point, une précision concernant la théorie que Raymond Duval est en train de développer depuis des années est nécessaire.

[5] "Système sémiotique" est un système de signes organisé. Pour exemple, le système d'écriture numérique binaire est un système sémiotique.

Dans cette théorie on accorde à la conversion une place centrale par rapport aux autres fonctions, et en particulier par rapport à celle de traitement qui est considérée par la plupart comme étant décisive du point de vue mathématique.

8. Une tentative de "définition" de *construction*; influence des bases socio - culturelles

La construction des concepts mathématiques dépend donc étroitement de la capacité d'utiliser *plusieurs* registres de représentations sémiotiques de ces concepts, c'est-à-dire:

1. d'en expliciter ou d'en reconnaître une représentation dans un registre donné
2. de *traiter* ces représentations à l'intérieur d'un même registre
3. de *convertir* ces représentations d'un registre donné à un autre

L'ensemble de ces trois éléments et les considérations faites aux paragraphes **2** et **3** mettent en évidence le profond lien entre noétique et constructivisme: cette "construction de la connaissance en mathématique" n'est-elle pas justement l'union de ces trois "actions" relatives aux concepts, c'est à dire l'expression même de la capacité de *représenter* les concepts, de *traiter* les représentations obtenues à l'intérieur d'un registre établi et de *convertir* les représentations d'un registre à un autre?
C'est comme si on était en train de spécifier les opérations de base qui dans leur ensemble définissent cette "construction", laquelle autrement resterait un terme mystérieux et ambigu, ouvert à toute sorte d'interprétations, même philosophiques.
Bien que l'affirmation suivante exigerait une analyse plus approfondie, il semble évident que les arrière-plans socio-culturels sur lesquels s'édifient les connaissances influencent la nature même des représentations conceptuelles des sujets. D'autre part, le *choix* des traits caractéristiques de la représentation du concept A qui, pour singulier et implicite qu'il soit, n'en est pas moins déterminé par la dimension socio-culturelle de appartenance. Comme on pourrait naïvement le croire de prime abord, et comme j'ai tenté de le montrer, ce *choix* n'est pas neutre; il résulte d'une action personnelle sur les bases de l'adhérence à une culture.

9. Le phénomène de la "scolarisation" et la noétique manquée

Le renoncement (naturellement inconscient) de l'étudiant à la dévolution, l'incapacité de l'étudiant à s'investir (ce qui est souvent la conséquence d'essais infructueux), et à assumer directement et personnellement la responsabilité de la construction de la connaissance, dans le milieu scolaire, sont liées à l'absence d'une appropriation et d'une coordination de la diversité des registres de représentation utilisée en mathématiques en raison. Cette absence résulte d'une

déficience didactique spécifique originelle. L'enseignant pourrait en effet ne pas mettre en oeuvre chacune des composantes de la construction en supposant à la fois l'homogénéité des fonctionnement sémiotique et la transparence du noétique dans la diversité des représentations sémiotiques (Duval, 1993) (il s'agit là d'une double identification très répandue parmi les enseignants, spécialement parmi ceux qui n'ont jamais eu l'occasion de réfléchir à l'aspect spécifique des difficultés rencontrées en mathématiques, ou qui considèrent cela superflu). Cela pourrait amener l'étudiant au désintérêt pour des mathématiques dont les démarches intellectuelles échappent et donc à la scolarisation des connaissances (D'Amore, 1999a): «J'entends ici me référer avec l'expression "scolarisation du savoir" à cet acte largement inconscient par lequel l'élève à un certain moment de sa vie sociale et scolaire (mais presque toujours au cours de l'école primaire) délègue à l'école (en tant qu'institution) et à l'enseignant (en tant que représentant de l'institution) la tâche de *sélectionner pour lui les connaissances significatives* (celles qui le sont d'un point de vue social, par un statut reconnu et légitimé par la noosphère) en renonçant à assumer directement leur choix sur la base d'une forme quelconque de critère personnel (goût, intérêt, motivation,...). À partir du moment où cette scolarisation comporte la reconnaissance de l'enseignant comme dépositaire des connaissances, du savoir socialement valables, il est évident qu'il y aura, plus ou moins en même temps, une scolarisation des rapports interpersonnels (entre l'étudiant et l'enseignant et entre l'étudiant et ses copains) et du rapport entre l'étudiant et le savoir: c'est ce qui [...] s'appelle "scolarisation des relations".»
À renforcer le "jeu des triades" (représentation, traitement, conversion), on peut voir quelle est l'issue de la recherche décrite dans D'Amore (1998). Dans cette recherche le même message concernant une situation relative à un simple exemple de relation binaire (on donnait des noms de villes et des noms d'états et la relation binaire était: "est en") était proposé à des élèves de différents niveaux scolaires, dans des différents registres sémiotiques, et avec des différentes représentations sémiotiques, et ce qu'on demandait était justement de reconnaître qu'il s'agissait du *même message*, de la *même information*.
Le résultat de cette recherche montre justement les difficultés rencontrées par les étudiants

- pour remonter du contenu conceptuel d'une représentation au contenu représenté
- pour vérifier que entre deux représentations dans un registre sémiotique donné il y a été simplement une transformation de type traitement
- pour vérifier que entre deux représentations sémiotiques de deux registres sémiotiques différents il y a été une transformation de représentation du type conversion.

Faute de clés de lecture et ayant des difficultés à discriminer ce qui est pertinent dans les situations qui leur sont présentées, les étudiants donnent un "sens" au message en créant des informations de types différents (que dans certains cas j'ai appelé "informations parasites") parfois éloignées de toute intention communicative de l'auteur; et ils cherchent des "prises" de traitement ou de conversion dans des aspects tout à fait marginaux, tels: la forme des graphiques, le type d'images par hasard présentes etc., ce qui est non pertinent pour l'expert en mathématiques.

D'autre part, la connaissance conceptuelle n'est à considérer seulement comme le produit d'un apprentissage conceptuel *stricto sensu* mais résulte aussi (et de façon consistante) de la connaissance spécifique de l'usage des procédures et des manipulations mathématiques; connaissance, que je n'hésite pas à déclarer elle-aussi conceptuelle.

10. La dévolution manquée, la cessation de l'implication

Dans le cas d'un échec dans la gestion de cette énorme quantité de représentations et de transformations il serait trop banal et simpliste de se limiter à une constatation, comme parfois l'enseignant déçu par l'apprentissage manqué de ses élèves semble faire. Où réside le *motif* de cet échec?
Cette question est déjà plus intéressante qu'une analyse, toujours particulière et contextualisée, des différents échecs et elle peut nous révéler beaucoup sur certaines impasses de l'enseignement.
Mais ici c'est la problématique de la dévolution manquée, de la cessation d'une implication personnelle de l'élève qui m'intéresse.
Je pense à un étudiant même doué, même conscient, même sensible, qui, peut-être justement à cause de cette sensibilité qu'il n'arrive pas à satisfaire, ou à cause d'une incapacité d'introspection dont il n'est pas responsable, se borne à observer et à constater son propre échec dans sa tentative de faire face à la complexité de la "citation" de la triade "représentation, traitement, conversion". L'étudiant pourrait décider (fut-ce de manière tout à fait inconsciente) de ...limiter les dégâts en acceptant le formalisme, la surface de ce qu'on lui demande, en s'adaptant à scolariser son savoir et son comportement c'est à dire en adoptant la médiation totale de l'enseignant par rapport à l'objet de connaissance, en adoptant ses choix et même ses goûts (D'Amore, 1999a).
Une analyse très précise des différentes composantes, et donc de la capacité à faire le point des différents aspects dans lesquels se représente la construction de la connaissance (dans notre cas spécifique, dans l'exemple donné en **3**., le concept ayant ½ comme un de ses nombreux représentants), pourrait aider l'enseignant à comprendre à quel moment commencent la résignation, la dévolution manquée, la dés-implication personnelle de l'étudiant dans cette construction.
Il existe une énorme différence entre d'un côté, l'institutionnalisation de la connaissance de la part de l'enseignant en tant que représentant de l'institution qui a décidé quel est le savoir qui compte; et de l'autre la scolarisation, l'acceptation passive des choix de l'enseignant.
Dans le premier cas l'enseignant joue le rôle de médiateur entre l'élève et le savoir et il veut, ou pense, rendre actif le premier: il sélectionne et valorise les choix et les "découvertes" de l'élève en leur reconnaissant un statut institutionnel d'employabilité et un permis officiel d'emploi. Le fondement de tout cela réside dans le principe pédagogiques et didactique, sans cesse répété de manière générale, que c'est l'élève qui construit ses connaissances.
Dans le deuxième cas l'enseignant joue le rôle de médiateur totalisant et il rend l'élève un sujet passif: il lui demande une confiance aveugle, il lui demande une

confiance aveugle dans l'institution en échange de promesses sur des capacités et des compétences futures qui n'arriveront pas forcément ou qui pourraient aussi n'être pas forcément utiles. Là l'élève cesse là de construire, en cessant donc d'apprendre.
Je crois que l'étude détaillée de la triade (représentation, traitement, conversion) peut s'appliquer à l'analyse des situations de dés-implication personnelle, pour mettre en évidence les véritables raisons qui conduisent à renoncer à comprendre en mathématiques et donc à la "scolarisation".

Acknowledgements
J'exprime ma sincère gratitude à Raymond Duval, lecteur patient des versions précédentes de cet article, qui m'à suggéré de modifications et intégrations. Je remercie aussi David Pimm pour m'avoir suggéré quelques adjonctions considérables.

Bibliographie

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble.* Année 1990-1991, LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, 103- 117.

D'Amore B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. *L'educazione matematica*, 1, 7-28 [texte bilingue, en italien et en anglais) En espagnol: *Uno*, 15, 1998, 63- 76.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia della Matematica. 1980-2001.* Bologna: Pitagora.

Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1, 7-25.

Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 57-74.

Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM Strasbourg. 5, 37- 65.

Duval R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et ed Sciences Cognitives*. 6, 139-163.

Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Porlán R., Riviero A., Martin R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores. *Enseñanza de las Ciencias*. 15-2, 155-171.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica.* Bologna: Pitagora.